Artikel erschienen in Zeitschrift Vermessung Photogrammetrie Kulturtechnik (VPK)
April 1995 (4/95), Seiten 192-194

# Lineare Transformation mit finiten Elementen

## Eine anpassungsfähige Verbindung zwischen alter und neuer Landesvermessung

*A. Carosio, M. Plazibat*

**Die neuen Methoden der Geodäsie ermöglichen zur Zeit die Bezugssysteme der Landesvermessung zu erneuern. Mit solchen Projekten sind alle Länder in Europa beschäftigt. Der Übergang vom alten ins neue System beansprucht viel Zeit und wird uns zwingen, während mehreren Jahren mit zwei Referenzen zu arbeiten. Dafür benötigt man ein anpassungsfähiges und einheitliches Verfahren, um die Koordinaten von einem System ins andere zu transformieren. Eine Transformation mit finiten Elementen ist besonders geeignet für diese Anwendung und kann als mögliche Norm für die Schweiz angesehen werden.**

**Les nouvelles méthodes géodésiques permettent actuellement de rénover les systèmes de référence des mensurations nationales. De tels projets sont en cours dans toute l'Europe. Le passage de l'ancien au nouveau système est coûteux en temps et oblige à faire coexister deux systèmes pendant de nombreuses années. Il est ainsi nécessaire de disposer d'une méthode flexible et homogène permettant de transformer les coordonnées d'un système dans l'autre. Une transformation avec des éléments finis est particulièrement adaptée à cet usage et celle décrite peut être considérée comme standard possible pour la Suisse.**

## Einleitung

Die Einführung einer neuen Landesvermessung (LV 95) bedingt, während längerer Zeit mit zwei verschiedenen Referenzen (Bezugsrahmen) zu arbeiten. Während dieser Zeit möchte man ein Transformationsverfahren haben, das eine Umrechnung der Koordinaten von einem System ins andere erlaubt, damit Fixpunkte eines Systems zusammen mit Punkten des anderen gebraucht werden können.

$$(Y_{LK}, X_{LK}) \leftrightarrow (Y_{95}, X_{95})$$

Es wird während mehreren Jahren Gebiete geben, wo schon neue Landeskoordinaten bis zu den Detailpunkten existieren, während angrenzend dazu noch die bisherigen Koordinaten gelten. An diesen Randgebieten soll die Transformation erlauben, im gewünschten Bezugsrahmen (LV03 oder LV95) zu arbeiten.

Die Qualität der Transformation wird von der Dichte der Passpunkte (Punkte mit geodätisch bestimmten Koordinaten in beiden Systemen) abhängen und lokal sehr unterschiedlich sein.

Solange die Abstände unter den Passpunkten noch gross sind, muss der Ingenieur jede Anwendung der Transformation sorgfältig beurteilen. Nach einer genügenden Verdichtung wird die Qualität der Transformation so gut sein, dass transformierte Koordinaten und geodätisch bestimmte Koordinaten im Gebrauch als gleichwertig betrachtet werden können. Der frühere Bezugsrahmen (LV03) könnte dann ohne Bedenken in den neueren vollständig transformiert werden.

Die Wahl eines Transformationsverfahrens kann nur stattfinden, wenn die gewünschten Eigenschaften klar formuliert sind, und man die Ziele der Anwendung kennt. Die Frage nach dem idealen Zustand stellt sich daher als erste.

## Die ideale Transformation

Die ideale Transformation entsteht, wenn man alle Punkte (von der 1. Ordnung bis zu den Hausecken), die in der Vergangenheit vermessen wurden, neu in das System der LV95 geodätisch durch neue, genaue Messungen bestimmt, und wenn die anderen geometrisch konstruierten Punkte (Punkte auf einer Geraden, rechtwinklige Polygone usw.) durch die gleiche Konstruktion neu berechnet. Für jeden Punkt hätte man die Unterschiede zwischen den alten Landeskoordinaten (LV03) und den neuen (LV95). Die ideale Transformation besteht aus einer Addition oder Subtraktion dieser Unterschiede. Ob die Transformation konform, äquivalent, mit grossen, kleinen oder unregelmässigen Verzerrungen ist, spielt absolut keine Rolle.

Die Ideallösung braucht eine vollständige Neumessung und kann nicht verwirklicht werden. Sie dient lediglich als Beurteilungskriterium für die mathematischen Lösungen, die man in Betracht ziehen wird.

## Anforderungen an die Transformation

Man benötigt für die Praxis eine einfachere mathematische Transformation, welche die ideale Transformation approximiert und während längerer Zeit beide Systeme verknüpft.
Folgende Anforderungen sind zu erfüllen:

- Die Punkte der bestehenden Landesvermessung (LV03), die in der LV95 neu bestimmt wurden, müssen hin und zurück die genauen Koordinatenwerte ergeben.
- Punkte in unmittelbarer Nähe müssen gleich transformiert werden (stetige Transformation).
- Das Verfahren muss einmal festgelegt werden, für die ganze Schweiz gelten (Norm), und solange in einem Gebiet nicht systematisch neu gemessen wird, muss die Transformation unverändert bleiben.
- Wo das neue Landessystem systematisch durch neue geodätische Messungen verdichtet wurde, soll die Transformation sukzessiv lokal verbessert werden können.
- Koordinaten, die einmal transformiert wurden, sollen jederzeit ohne Qualitätsverlust zurücktransformiert werden können.
- Die Berechnung muss einfach sein und wenig Rechenaufwand verursachen (PC, Geometerbüro).

## Mathematische Lösungsansätze

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, die in Erwägung gezogen werden können. Als Beispiele können erwähnt werden:

- Ähnlichkeitstransformation
- Kollokation
- Interpolation nach dem arithmetischen Mittel maschenweise affine Transformation
- usw.

Die Anzahl der Lösungen ist sehr gross, da auch Kombinationen der verschiedenen Verfahren in Frage kommen.

## Die lineare Transformation mit finiten Elementen

Eine einfache stetige Transformation, die das betrachtete Gebiet in eine endliche Anzahl Flächenelemente unterteilt und sich leicht berechnen lässt, ist die maschenweise affine Transformation. Sie wurde nach dem Vergleich der verschiedenen Alternativen und nach Beachtung der vorher aufgezählten Anforderungen als sehr geeignete Lösung beurteilt. Das Verfahren kann auf einfache Art beschrieben werden.
Das ganze Gebiet der Schweiz wird einmal in Dreiecksmaschen unterteilt. (Abb. 1) Die Knoten sind in der Regel Punkte, für welche sowohl alte Landeskoordinaten als auch LV95-Koordinaten vorliegen. In besonderen Fällen können auch mit einem geeigneten Verfahren vorgängig interpolierte Punkte als Knoten verwendet werden. Für jedes Dreieck wird eine lineare Transformation so festgelegt, dass die Eckpunkte, die in beiden Koordinatensystemen vorliegen, genau diese Werte durch die Transformation erhalten. Die so bestimmte Affinität wird für alle Punkte des Dreiecks (innere und Randpunkte) verwendet.
Dieses Vorgehen hat folgende Vorteile:

- Jede Masche ist ein klar abgetrenntes Gebiet, in welchem die Transformation ausschliesslich von den Koordinaten der Eckpunkte abhängig ist.
- Lokale Verdichtungen wirken sich nur innerhalb der eigenen Masche aus.
- Bei Bedarf können lokale Verbesserungen in Teile von Maschen angebracht werden, wenn man sie mit transformierten Punkten begrenzt.
- Mit dieser linearen Transformation kann man jede komplexe Transformation approximieren (transformierte Punkte als fiktive Passpunkte).
- Die Transformation ist stetig, als lineare Funktion umkehrbar und leicht zu berechnen.

Als Nachteil kann hier die Richtungsunstetigkeit einer transformierten Linie beim Übergang von Masche zu Masche erwähnt werden.

## Die numerische Lösung

Die Affintransformation ist eine lineare Transformation, mit der eine Ebene in eine andere Ebene abgebildet wird. Gerade Linien werden als gerade Linien, paralle Geraden als parallele Geraden und Kreise als Ellipsen abgebildet.
Die Affinität zwischen den Koordinatensystemen $Y_{LK}$, $X_{LK}$ und $Y_{95}$, $X_{95}$ wird durch sechs Parameter $a_i$, $b_i$ (i=0,1,2) bestimmt.
Sie ist analytisch durch die beiden linearen Funktionen

$$X_{95} = a_0 + a_1 X_{LK} + a_2 Y_{LK}$$

$$Y_{95} = b_0 + b_1 X_{LK} + b_2 Y_{LK}$$

darstellbar.

In einer Masche stehen die Koordinaten von drei Punkten zur Verfügung, um das Gleichungssystem eindeutig lösen zu können.
Es entsteht ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten ($a_0$, $a_1$, $a_2$) aus den X-Koordinaten sowie ein gleich grosses System für $b_0$, $b_1$, $b_2$ aus den Y-Koordinaten jeder Masche.
Während die numerische Lösung des Gleichungssystems für eine affine Transformation kein Problem darstellt, ist die Verwaltung und Organisation der Daten für alle Maschen, die das ganze Land abdecken, wesentlich anspruchsvoller.
Die Definition der dreieckigen Maschen ist Bestandteil der Transformation und kann nicht automatisch mit einem Algorithmus gebildet werden. Man muss sie sorgfältig entwerfen und festlegen.
Die Liste der Dreieckmaschen und die Liste der Koordinaten der Eckpunkte sowohl für die LV03 als auch für die LV95 muss vom Transformationsprogramm verwaltet werden. Dazu müssen auch Funktionen für die Konsistenzüberprüfung gehören. Man

muss z.B. kontrollieren können, ob Überlappungen oder Lücken entstanden sind und ob die Koordinatenlisten vollständig sind.
Eine weitere Komponente, die das Programm berücksichtigen muss, ist die Zeit. Die Transformation mit finiten Elementen erlaubt eine sukzessive lokale Verdichtung der Vermaschung. Der Anwender muss daher über die gültige Gebietseinteilung informiert werden und sie nach Bedarf steuern können. Insbesondere muss die Möglichkeit bestehen, eine frühere Transformation mit einer groben Vermaschung rückgängig zu machen und eine neuere Berechnung mit feineren Dreieckmaschen durchzuführen.

## Die Verzerrungen

Die Affintransformation ist nicht nur geeignet eine Transformation zu berechnen, sie kann auch für die Ermittlung von Netzdeformationen eingesetzt werden. Die Analyse erfolgt auf Grund von Lageveränderungen identischer Punkte zweier Bezugssysteme durch die Berechnung extremer Verzerrungen in Teilfiguren.

Eine Zusammenfassung der Verzerrungseigenschaften dieser Transformation findet sich in Wolfrum [5]. Bei Schneider [3] ist die Anwendung der Transformation zur Strain-Analyse beschrieben. Mit der gleichen Problematik befassen sich u.a. auch Welsch [4] und Koehler [1]. Auf die Theorie soll an dieser Stelle nicht detailliert eingegangen werden.
Zur Beschreibung der Verzerrungsverhältnisse in einem Vermaschungsdreieck werden die dimensionslosen Komponenten des Strain-Tensors

$$v_x^T = \left| v_{xx} \quad v_{xy} \quad v_{yy} \right|$$

und der Drehwinkel $\mu$ ?verwendet, um die Hauptachsen der Verzerrung, die Achsen der maximalen Scherung und die Dilation zu bestimmen. (Abb. 2)

Wobei folgendes gilt:

$$v_{xx} = a_1 \cos\mu - b_1 \sin\mu$$

$$\begin{aligned} v_{xy} &= a_1 \sin\mu + b_1 \cos\mu \\ &= a_2 \cos\mu - b_2 \sin\mu \end{aligned}$$

$$v_{yy} = a_2 \sin\mu - b_2 \cos\mu$$

$$\mu = \arctan \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2}$$

Daraus errechnen sich die Hauptverzerrungen und ihre Richtungen wie folgt:

$$e_{1,2} = (\frac{v_{xx} + v_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_{xx} - v_{yy})^2 + 4v_{xy})} - 1$$

$$\tan 2t_m = \frac{2v_{xy}}{v_{xx} - v_{yy}}$$

Damit ist die Strain-Ellipse (Tissot'sche Indikatrix) mit den Halbachsen $e_1$ bzw. $e_2$ fest- gelegt, und daraus lässt sich die andere Verzerrungsgrösse berechnen:

$$\Omega_{max} = \pm(e_1 - e_2)$$

$$\Delta = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

Die Hauptachsen der Verzerrung ($e_{1,2}$) geben die extremen Massstabsunterschiede an. Positive Vorzeichen deuten auf Dehnung, negative Vorzeichen auf Stauchung hin.
Die Achsen der maximalen Scherung (?$_{max}$) stellen die Richtungen und die Beträge der maximalen Richtungsverzerrungen dar. Sie entsprechen den Winkelhalbierenden der Hauptverzerrungsrichtungen.
Dilation (?) stellt die mittleren Massstabsänderungen dar. Auch hier deuten positive Vorzeichen auf Dehnung, negative Vorzeichen auf Stauchung hin.
Eine maschenweise Darstellung der Verzerrungskomponenten ist geeignet, um homogene oder heterogene Veränderungen oder ausgeprägte Hauptdeformationsrichtungen zu erkennen.

## Das Programm FINELTRA

Das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ hat im Auftrag des Bundesamtes für Landestopographie ein Programm entwickelt, um die lineare Transformation mit finiten Elementen für die Umstellung der Landesvermessung von LV03 zu LV95 in der Praxis einsetzen zu können.
Das Programm ist im GEO-Paket integriert und lässt sich als Baustein dieses umfassenden Softwaresystems einsetzen.
Die Entwicklung wurde hauptsächlich von M. Plazibat betreut und dokumentiert [2].

*Literatur:*


*[1] Koehler, M. (1986): Ein geodätischer Beitrag zur Erfassung und Darstellung des Verzerrungsverhaltens von Eisflächen unter Anwendung der Kollokationsmethode. DGK Reihe C, Heft Nr. 318, München*

*[2] Plazibat, M. (1994): FINELTRA, Benützeranleitung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich*

*[3] Schneider, D. (1982): Complex Crustal Strain Approximation. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Mitteilungen Nr. 33*

*[4] Welsch, W. (1982): Zur Beschreibung homogenen Strains oder Einige Betrachtungen zur affinen Transformation. ZfV 107 (5), 173-182*

*[5] Wolfrum, O. (1978): Die Verzerrungseigenschaften der affinen Transformation. AVN 85 (10), 367-374*



Adresse der Autoren:

Prof. Dr. A. Carosio, M. Plazibat
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
Geo-Informationssysteme und Fehlertheorie
ETH Hönggerberg
8093 Zürich

## Abbildungen:

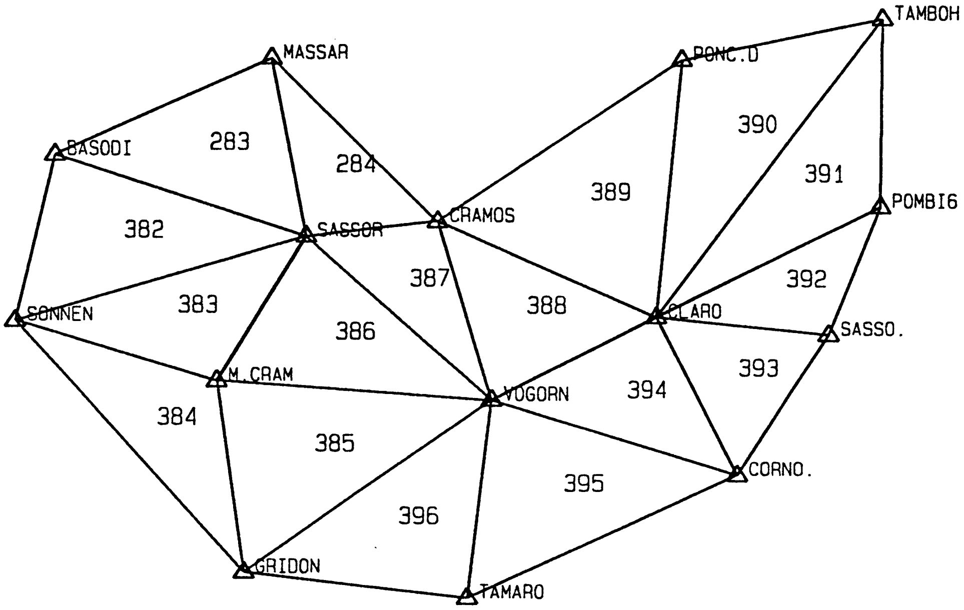


**Abb. 1: Beispiel einer Dreiecksvermaschung für die Südschweiz**

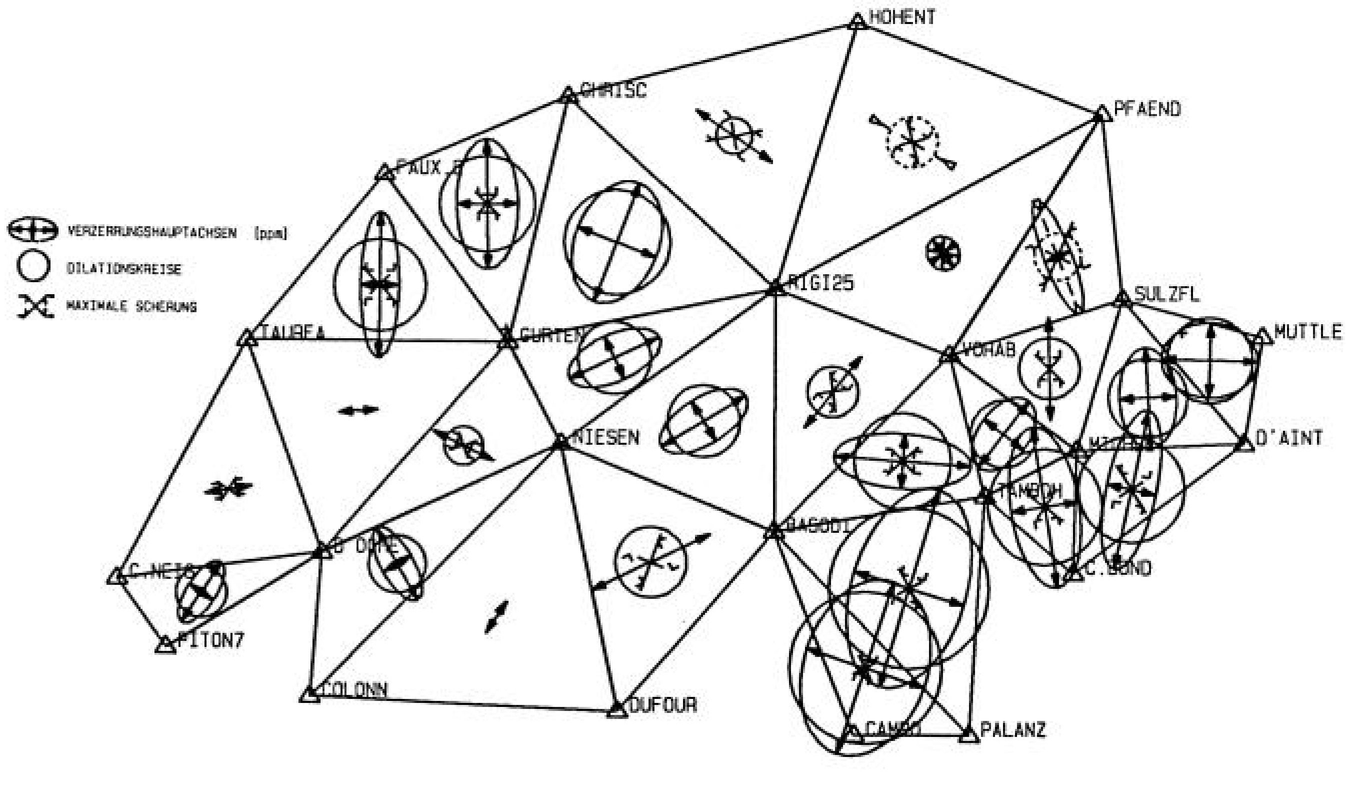


**Abb. 2: Indikatoren der Verzerrungen zwischen LV03 und LV95 in einer groben Testvermaschung**